Theoretische Physiq II
für Lehramtsstudenten
WS 2005/06

Vorlesunq: Michael Flohr
Übunqen: Christian Sämann
Übunqsleitunq: Kirsten Vogeler

Qlausur
(Freitag, 01.02.2006, 8-10 Uhr)

1. *Korrespondenzprinzip*: **[1+1+1 = 3 P.]**
   Geben Sie an, durch welche Operatoren die Observablen
   E für Energie, [1 P.]
   $\vec{p}$ für den Impuls, und [1 P.]
   $\vec{L}$ für den Drehimpuls [1 P.]
   dargestellt werden, wenn im Ortsraum gearbeitet wird.

2. *Kontinuitätsgleichung*: **[1+1+3 = 5 P.]**
   Wie lautet die Kontinuitätsgleichung, auch von-Neumann-Gleichung genannt? [1 P.]
   Was ist ihre physikalische Bedeutung? [1 P.]
   Leiten Sie diese aus der Schrödinger-Gleichung in der Ortsdarstellung,
   $$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{x},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla})^2 + V(\vec{x})\right)\Psi(\vec{x},t)\,,$$
   her. [3 P.]

3. *Harmonischer Oszillator – Ansatz*: **[1+3+1 = 5 P.]**
   Wie lautet allgemein der Kommutator $[p,x]$ des Impuls- und Orts-Operators? [1 P.]
   Der Hamilton-Operator für einen ein-dimensionalen harmonischen Oszillator lautet
   $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\,.$$
   Schreiben Sie nun $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, indem Sie einen Ansatz
   $$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\chi_0} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\chi_0 p\right) \quad \text{mit} \quad \chi_0 \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$
   machen, die Konstante χ_0 bestimmen und den Kommutator $[p,x]$ verwenden. [3 P.]
   Zeigen Sie, dass für den Kommutator $[a,a^\dagger] = 1$ gilt. [1 P.]

4. *Harmonischer Oszillator – Lösung*: **[1+3+2 = 6 P.]**
   Wie kommt man allgemein von einem Zustand $|\Psi\rangle$ auf die Wellenfunktion $\Psi(x)$? [1 P.]
   Finden Sie die Wellenfunktion für den Grundzustand des harmonischen Oszillators, indem Sie die Gleichung $a|\Psi_0\rangle = 0$ mit Hilfe von $(*)$ in der Ortsdarstellung lösen. Die Normierung brauchen Sie nicht zu bestimmen. [3 P.]
   Finden Sie die Energie-Eigenwerte der Zustände
   $$|\Psi_n\rangle = \frac{1}{n!}(a^\dagger)^n|\Psi_0\rangle\,,$$
   wobei $|\Psi_0\rangle$ wieder den Grundzustand bezeichnet. Verwenden Sie hierzu $[a,a^\dagger] = 1$. [2 P.]

5. *Drehimpuls und Spin*: **[2+1+3+3 = 9 P.]**

Die Drehimpuls-Algebra lautet bekanntlich

$$[L_j, L_k] = \sum_{l=1}^{3} \mathrm{i}\hbar \varepsilon_{jk}{}^{l} L_l\,.$$

Es seien neue Operatoren $L_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(L_1 \pm \mathrm{i}L_2)$ definiert. Berechnen Sie damit die Kommutatoren $[L_3, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$ und $[L_+, L_-] = \hbar L_3$. [2 P.]
Drücken Sie $\vec{L}^2 = \sum_j L_j^2$ durch $L_\pm$ und L_3 aus. [1 P.]
Es sei $|\ell, m\rangle$ ein Eigenzustand mit den Eigenwerten

$$\begin{aligned} L_3|\ell, m\rangle &= \hbar m|\ell, m\rangle\,, \\ \vec{L}^2|\ell, m\rangle &= \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell, m\rangle\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte, die die Zustände $|\ell', m'\rangle = (L_\pm|\ell, m\rangle)$ besitzen. [3 P.]
Zum Bahndrehimpuls kommt oft noch der Spin hinzu. Auch die Spinoperatoren S_j erfüllen die Drehimpuls-Algebra, $[S_j, S_k] = \sum_l \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{jk}{}^{l} S_l$. Zeigen Sie, dass auch der Gesamtdrehimpuls $J_j = L_j + S_j$ die Drehimpuls-Algebra erfüllt, wenn $[L_j, S_k] = 0$ gilt. Drücken Sie damit den Operator $\vec{L}\cdot\vec{S}$ allein durch $\vec{J}^2$, $\vec{L}^2$ und $\vec{S}^2$ aus. [3 P.]

6. *Wasserstoffatom*: **[1+3+3+2 = 9 P.]**

Wie lautet der Hamilton-Operator für das Wasserstoffatom? [1 P.]
Begründen Sie, dass $[H, L_3] = [H, \vec{L}^2] = 0$ ist, diskutieren Sie die physikalische Bedeutung dieser Tatsache und skizzieren Sie das effektive Potential. [3 P.]
Geben Sie das Energie-Spektrum $E_{n,\ell,m}$ der Eigenzustände $|n, \ell, m\rangle$ des Wasserstoffatoms an und diskutieren Sie kurz die physikalische Bedeutung der Quantenzahlen n, ℓ und m. [3 P.]
Wie hoch sind die einzelnen Energie-Niveaus $E_{n,\ell,m}$ entartet (mit Begründung)? [2 P.]

7. *Störungsrechnung*: **[1+3+1 = 5 P.]**

Es bezeichne H einen Hamilton-Operator mit bekannten Eigenzuständen $|n\rangle$ und Energie-Eigenwerten $E_n^{(0)}$. Weiter sei H' eine kleine Störung. Wie sind in erster Ordnung die Korrekturen $E_n^{(1)}$ der Energie-Eigenwerte gegeben? [1 P.]
Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem homogenen, konstantem Magentfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$, das in die z-Richtung zeigt. Dies kann als Störung mit $H' = \vec{B}\cdot\vec{L} = BL_3$ aufgefasst werden. Berechnen Sie in erster Ordnung die Korrektur $E_{n,\ell,m}^{(1)}$ der Energie-Eigenwerte. Von welchen Quantenzahlen hängt diese Korrektur tatsächlich ab? [3 P.]
Welche Entartung wird durch das äußere Magnetfeld also aufgehoben und welche Symmetrie wird also gebrochen? [1 P.]

Punqte:[1] $\left[\begin{array}{lcl} \textbf{Gesamt} & = & \textbf{42 P.} \\ \textbf{Bestanden} & \geq & \textbf{23 P.} \end{array}\right]$

[1] "Ein Schelm, wer böses dabei denkt!"